## Enero-Junio 2019

## MA1112 - Matemáticas II

## Solución Parcial 2 (30 %)

### Turno 3-4

**Pregunta 1**

(12 ptos.) Resuelva las siguientes integrales:

**a)** $\displaystyle\int x\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4e^{2x}+4e^x+10}}$ **c)** $\displaystyle\int_1^4 \ln[[x]]\,\mathrm{d}x$

**Solución**

**a)** Sea

$$I = \int x\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos integración por partes y hacemos:

$$\begin{array}{rcl} u = \cos(\ln x) & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \dfrac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} & \Leftarrow & dv = x\,\mathrm{d}x \end{array}$$

De modo que la integral queda:

$$I = \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}\int x\operatorname{sen}(\ln x)\mathrm{d}x$$

Aplicamos integración por partes a la nueva integral haciendo:

$$\begin{array}{rcl} u = \operatorname{sen}(\ln x) & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} & \Leftarrow & dv = x\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}\int x\operatorname{sen}(\ln x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}\int x\cos(\ln x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{4}\int x\cos(\ln x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{4}I \end{aligned}$$

Es una integral cíclica, por lo que pasamos la expresión $-\dfrac{I}{4}$ sumando al otro lado de la igualdad. Obteniendo:

$$\begin{aligned} I + \frac{I}{4} &= \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen}(\ln x) \\ \frac{5}{4}I &= \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen}(\ln x) \\ I &= \frac{1}{5}\Big(2x^2\cos(\ln x) + x^2\operatorname{sen}(\ln x)\Big) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int x\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{5}\Big(2x^2\cos(\ln x) + x^2\operatorname{sen}(\ln x)\Big) + C}$$

**b)** Hacemos el cambio $\boxed{u = e^x}$, entonces $\boxed{\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x}$.
Sustituyendo en la integral, obtenemos que:

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4e^{2x} + 4e^x + 10}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4u^2 + 4u + 10}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(2u+1)^2 + (3)^2}}$$

Hacemos el cambio $\boxed{\omega = 2u + 1}$, entonces $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\omega}{2} = \mathrm{d}u}$ La integral queda:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega^2 + 3^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{3\sqrt{\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 + 1}}$$

Hacemos el cambio $\boxed{\theta = \dfrac{\omega}{3}}$, de modo que $\boxed{3\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\omega}$, y tenemos una integral de tabla:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsenh}(\theta) + C$$

donde $C$ es una constante arbitraria. Devolviendo todos los cambios, tenemos finalmente que

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4e^{2x} + 4e^x + 10}} = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{3}\Big(2e^x + 1\Big)\right) + C}$$

**Observación:** Inmediatamente después de hacer el cambio $\omega = 2u + 1$ también se puede hacer el cambio trigonométrico $\boxed{\omega = 3\operatorname{tg}\theta}$. Al resolver la integral por este método, o también aplicando en nuestro resultado previo la identidad

$$\text{arcsenh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

se obtiene una solución equivalente:

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4e^{2x}+4e^x+10}} = \boxed{\frac{1}{2}\,\ln\Big(\big(2e^x+1\big)+\sqrt{4e^{2x}+4e^x+10}\Big)+K}$$

donde $K$ es una constante arbitraria.

**c)** Es necesario partir la integral, considerando la naturaleza de la función parte entera, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \ln[[x]]\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \ln[[x]]\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \ln[[x]]\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \ln[[x]]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \ln(1)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \ln(2)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \ln(3)\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(1)\Big[(2)-(1)\Big] + \ln(2)\Big[(3)-(2)\Big] + \ln(3)\Big[(4)-(3)\Big] \\
&= \cancel{\ln(1)} + \ln(2) + \ln(3) \\
&= \boxed{\ln(6)}
\end{aligned}$$

**Pregunta 2**

(6 ptos.) Sea $R$ la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = -\ln(x+1)$ y la recta $x = e - 1$

**a)** Calcule el área de la región $R$.

**b)** El eje $X$ divide la región $R$ en dos regiones, $R_1$ y $R_2$. Sea $R_2$ la que se encuentra por debajo del eje $X$, halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y que divide a la región $R_2$ en dos subregiones de igual área.

**Solución**

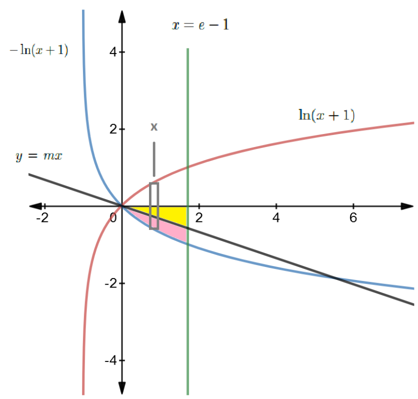


Figura 1: Pregunta 2

**a)** Gráficamente (o analíticamente) observamos fácilmente que las funciones se intersecan en el origen y que para cualquier $x$ fijo en el intervalo $[0, e-1]$ la función $f(x)$ siempre será mayor o igual que $g(x)$. De esta manera, podemos calcular el área de la región $R$ de la siguiente manera:

$$A(R) = \int_0^{e-1} \Big[\big(\ln(x+1)\big) - \big(-\ln(x+1)\big)\Big]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{e-1} \ln(x+1)\mathrm{d}x$$

Haciendo un cambio de variable $u = x + 1$, obtenemos una integral que podemos considerar de tabla:

$$A(R) = 2\int_1^{e} \ln(u)\mathrm{d}u = 2\Big[u\ln(u) - u\Big]_1^{e} = 2\Big[\cancel{\big(e\ln(e) - e\big)} - \big(\cancel{(1)\ln(1)} - 1\big)\Big] = \boxed{2}$$

**b)** Primero observamos que dada la simetría de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, el eje $X$ no solo divide a la región $R$ en dos subregiones $R_1$ y $R_2$, sino que además estas subregiones tienen igual área. Esto es

$$A(R_1) = A(R_2) = \frac{1}{2}A(R) = 1$$

Ahora, buscamos una recta que pase por el origen y que divida a la región $R_2$ en dos subregiones de igual área. Una recta con estas características sabemos que tiene la forma $y = mx$, y como $R_2$ se encuentra por debajo del eje $X$, anticipamos que necesariamente $m < 0$. Nuestro problema consiste en hallar el valor de $m$.

De la figura 1 observamos que buscamos que el área del triángulo limitado por las rectas $x = e-1$, $y = mx$ y el eje $X$ (en amarillo), sea igual al área limitada por las rectas $y = mx$, $x = e-1$ y la curva $y = -\ln(x+1)$ (en rosado).

De esta manera, sabiendo que $A(R_2) = 1$, tenemos tres formas de resolver el problema:

- Hallando el área del triángulo, igualando a la mitad de $A(R_2)$ y despejar el valor de $m$.
- Hallando el área de la otra subregión de $R_2$, igualando a la mitad de $A(R_2)$ y despejar el valor de $m$.
- Hallando el área de ambas subregiones de $R_2$, igualarlas y despejar el valor de $m$. (No precisaríamos del valor de $A(R_2)$ en este caso.)

Las tres opciones están escritas en orden de dificultad o longitud , siendo la primera la más sencilla y corta. Procederemos con ella. Primero, intersecamos la recta $y = mx$ con la recta $x = e-1$, obteniendo el punto $\big(e-1, m(e-1)\big)$. Así, los vértices del triángulo vienen dados por los puntos: $(0,0)$, $(e-1,0)$ y $\big(e-1, m(e-1)\big)$. Es conocido que el área de un triángulo es la mitad de su base por su altura, e igualando esto a la mitad del área de la región $R_2$, tenemos

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{\Big[(e-1)-(0)\Big]\Big[(0)-\big(m(e-1)\big)\Big]}{2} = \frac{1}{2} = \frac{A(R_2)}{2}$$

Así, de la igualdad central obtenemos que

$$-m(e-1)^2 = 1$$

Luego, despejando $m$, obtenemos

$$m = -\frac{1}{(e-1)^2}$$

Notemos que, efectivamente, $m < 0$. Finalmente, la ecuación de la recta que buscamos viene dada por

$$\boxed{y = -\frac{x}{(e-1)^2}}$$

**Pregunta 3**

(6 ptos.) Sea $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$, definida por $y = f(x) = \cosh x$; y sea además $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ la inversa de $f$, tal que $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arccosh}(y)$.

**a)** Demuestre la fórmula para la inversa, $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

**b)** Use el resultado de la parte **a)** para resolver la ecuación $\cosh x = \sqrt{2}$.

**Solución**

**a)** Lo que necesitamos es despejar $x$ de la ecuación $y = \cosh x$. Para esto, usamos la definición del coseno hiperbólico:

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

De aquí, manipulando algebraicamente obtenemos la igualdad

$$2ye^x = e^{2x} + 1$$

La cual se puede reescribir como

$$(e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$$

Identificándola como una ecuación cuadrática, utilizamos la fórmula de la resolvente para tener que

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Luego, aplicando logaritmo natural a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Finalmente, como el dominio de $f(x)$ son los reales no negativos, debemos tomar solo el signo positivo. De lo contrario, el argumento del logaritmo natural toma valores entre 0 y 1, haciendo que $x$ tenga valores negativos, lo cual contradice el dominio de $f$. Así, obtenemos

$$\boxed{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)} \quad \text{QED}$$

**b)** Aplicamos la función inversa, arcocoseno hiperbólico, a ambos lados de la igualdad, de modo que

$$\cosh x = \sqrt{2}$$

Queda

$$x = \operatorname{arccosh}(\sqrt{2})$$

Utilizando la fórmula antes demostrada, tenemos que

$$x = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}\right) = \boxed{\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)} \approx 0{,}88$$

## Pregunta 4

(6 ptos.) Halle el dominio y la primera derivada de la función

$$f(x) = \operatorname{arctgh}(\sqrt{x+1}) - (\cosh x)^{\ln(1+\ln(-x))}$$

## Solución

Reescribimos $y = f(x) = y_1 - y_2$, donde $y_1 = \operatorname{arctgh}(\sqrt{x+1})$ y $y_2 = (\cosh x)^{\ln(1+\ln(-x))}$

**a) Dominio**.

El dominio de $f(x)$ es la intersección de los dominios de $y_1$ y $y_2$.

Para el dominio de $y_1$, sabemos que la arcotangente hiperbólica tiene dominio en $(-1,1)$, y como su argumento tiene una raíz, el argumento de ésta debe ser mayor o igual a cero. Así, tenemos por un lado que

$$|\sqrt{x+1}| < 1$$

De donde se obtiene que $x < 0$, o $x \in (-\infty, 0)$. También se debe cumplir que $x + 1 \geq 0$, entonces $x \geq -1$, o $x \in [-1, \infty)$. Intersecando ambos intervalos obtenemos que el dominio de $y_1$ es el intervalo $[-1, 0)$.

Para el dominio de $y_2$, como el coseno hiperbólico es siempre positivo, la base de esta función exponencial general no presenta problema. Nos enfocamos en el dominio del exponente que, como involucra logaritmos naturales debemos asegurar que los argumentos de éstos siempre sean positivos. De aquí que se tenga que cumplir

$$1 + \ln(-x) > 0$$

y por otro lado que

$$-x > 0$$

Obteniendo respectivamente los intervalos $(-\infty, -e^{-1})$ y $(-\infty, 0)$. Al intersecarlos, obtenemos que el dominio de $y_2$ viene dado por el intervalo $(-\infty, -e^{-1})$.

Finalmente, el dominio de $f(x)$ viene dada por la intersección de los intervalos $[-1, 0)$ y $(-\infty, -e^{-1})$; obteniendo

$$\boxed{\mathrm{Dom}_f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \in [-1, -e^{-1})\}}$$

**b) Derivada**.

Por la linealidad de la derivada, es claro que

$$f'(x) = y' = [y_1 - y_2]' = y_1' - y_2'$$

Por esta razón, hallamos las derivadas de $y_1$ y $y_2$ por separado y luego sustituimos en $f'(x)$.

Para $y_1'$, aplicamos derivación directa:

$$\begin{aligned} y_1' &= \left[\operatorname{arctgh}\left(\sqrt{x+1}\right)\right]' \\ &= \frac{1}{1-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{1-(x+1)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}} \end{aligned}$$

Para $y_2'$, usamos derivación logarítmica:

$$\begin{aligned} y_2 &= (\cosh x)^{\ln(1+\ln(-x))} \\ \ln(y_2) &= \ln\left(1+\ln(-x)\right)\ln(\cosh x) \qquad \text{(Derivamos implícitamente)} \\ \frac{y_2'}{y_2} &= \left[\frac{1}{1+\ln(-x)}\cdot\frac{1}{(-x)}\cdot(-1)\right]\ln(\cosh x)+\left[\frac{1}{\cosh x}\cdot\operatorname{senh} x\right]\ln\left(1+\ln(-x)\right) \\ y_2' &= y_2\left[\frac{\ln(\cosh x)}{x\left(1+\ln(-x)\right)}+\operatorname{tgh}(x)\ln\left(1+\ln(-x)\right)\right] \\ y_2' &= \boxed{(\cosh x)^{\ln(1+\ln(-x))}\left[\frac{\ln(\cosh x)}{x\left(1+\ln(-x)\right)}+\operatorname{tgh}(x)\ln\left(1+\ln(-x)\right)\right]} \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir en $y'$, tenemos

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}-(\cosh x)^{\ln(1+\ln(-x))}\left[\frac{\ln(\cosh x)}{x\left(1+\ln(-x)\right)}+\operatorname{tgh}(x)\ln\left(1+\ln(-x)\right)\right]}$$

Prof. Jorge Sánchez
jorgesanchez@usb.ve